

КАРАТАЕВА ДАНАГУЛЬ СЕРХИЛОВНА

**ОСЦИЛЛЯТОРНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОГО КЛАССА
КВАЗИЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО
ПОРЯДКА**

АННОТАЦИЯ

**диссертации на соискание степени доктора философии (PhD) по
специальности 6D060100-Математика**

Актуальность темы исследования. Диссертация посвящена вопросам осцилляционных свойств одного класса квазилинейных разностных уравнений второго порядка.

В 1836 году французский математик Штурм (Sturm С.) в своей знаменитой 80-страничной работе исследовал поведение порядка изменения решения линейного дифференциального уравнения второго порядка, ввел понятие осцилляторности и неосцилляторности уравнения, исследовал качественные свойства решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка, а также доказал свои известные теоремы сравнения и чередования нулей как уравнения с тем свойством, что любые решения имеют бесконечное число нулей. С тех пор исследования в этой области идут полным ходом и продолжаются по сей день. Суонсон (С.А. Swanson) обобщил в своей работе результаты исследования линейных уравнений до 50-х годов прошлого века.

Изучение линейных дифференциальных уравнений началось с работ А. Эльберта и Ж. Д. Мирзова, опубликованных в конце 70-х годов прошлого века. Было показано, что многие свойства линейного уравнения, такие как теорема сравнения Штурма, теорема о чередовании нулей, применимы к полулинейному дифференциальному уравнению. Чешский математик О. Досли (O.Dosly) внес большой вклад в изучение полулинейных дифференциальных уравнений.

Полулинейное разностное уравнение второго порядка исследовалось в 1990-х годах в основном методом Риккати, и результаты до 2000 года приведены в книге Р.П. Агарвала (Agarwal R.P.). Начиная с 2001 г. в работах П.Рехака (Rehak P.) и О.Досли они довели теорию полулинейного разностного уравнения второго порядка до уровня теории полулинейного дифференциального уравнения второго порядка, установили полные аналоги теорема вращения, теорема сравнения Штурма и обобщенная теорема чередования нулей. В книге О. Досли и П. Рехака за 2005 год им были показаны методы исследования полулинейного дифференциального уравнения второго порядка и полулинейного разностного уравнения второго порядка, и представлены результаты этих уравнений до 2005 года.

В общем, разностные уравнения, независимо от дифференциальных уравнений, сами по себе имеют большое значение. Может применяться при

математическом моделировании различных явлений и изменений в жизни и окружающей среде, а также в областях экономики, физики, химии, биологии и дискретных динамических систем. При решении дифференциальных уравнений численным методом полезно знать осцилляторность решений дискретных уравнений. Если решение является неосцилляторным, то можете быть уверены, что численный расчет работает хорошо.

Исследование осцилляторных свойств рассматриваемых уравнений основано на двух эквивалентных принципах, изложенных в теореме о вращении.

Первый принцип называется методом Рикатти, а второй принцип - вариационным методом. В методе Рикатти от рассматриваемого уравнения переходим к уравнению Рикатти и проверяем, имеет ли оно распределение решения. Однако по отношению к полулинейному разностному уравнению второго порядка уравнение Рикатти является более сложным, чем полулинейное дифференциальное уравнение второго порядка. Таким образом, аналог результатов, полученных методом Рикатти для полулинейного дифференциального уравнения второго порядка, не получен полностью для полулинейного разностного уравнения второго порядка.

Кроме того, если коэффициент U в полулинейном разностном уравнении второго порядка представляет собой последовательность чисел с разными знаками, то изучение уравнения будет затруднено. А вариационный метод приводит к изучению весовых неравенств. Многие результаты, полученные из приведенных выше уравнений, получены с помощью метода Рикатти.

Вариационный метод рассматривается при наличии хотя бы одного коэффициента степенных последовательностей полулинейного разностного уравнения второго порядка. Потому что, в общем случае, выполнение неравенства было нерешенной проблемой. Применение метода вариации в линейных уравнениях, дифференциальных и разностных уравнениях одной и многих переменных, а также важность условий осцилляторности и неосцилляторности этих уравнений в спектральной теории дифференциальных операторов хорошо описаны в книге Н. М. Глазмана. Однако по крайней мере один из коэффициентов реальных дифференциальных или разностных уравнений, рассматриваемых в нем, является степенной функцией или последовательностью.

Если найдены необходимые и достаточные условия для выполнения разностного неравенства в соответствии с полулинейным разностным уравнением второго порядка в терминах коэффициентов полулинейного разностного уравнения второго порядка, тогда были бы найдены необходимые, достаточные условия осцилляторности и неосцилляторности полулинейного разностного уравнения второго порядка в терминах коэффициентов.

Таким образом, вопрос о решении разностного неравенства в соответствии с полулинейным разностным уравнением второго порядка без

ограничения коэффициентов уравнения и применении его результатов к осцилляционным свойствам полулинейного разностного уравнения второго порядка остается открытым.

Рассматриваемая диссертация посвящена исследованию этой очень актуальной проблемы.

В диссертации получены необходимые и достаточные условия для выполнения разностного неравенства с соответствующим полулинейным разностным уравнением второго порядка получены в терминах коэффициентов уравнения, в случае когда коэффициент U полулинейного разностного уравнения не является отрицательным и представляет собой последовательность любого знака. Здесь предполагается, что этот коэффициент произвольная последовательность действительных чисел, т.е. члены этой последовательности могут принимать значения любого знака.

Исходя из этого даны необходимые и достаточные условия осцилляторности полулинейного разностного уравнения второго порядка. В результате этих результатов возникли новые осцилляционные свойства линейного разностного уравнения второго порядка.

Осцилляционные свойства разностных уравнений изучаются учеными во многих странах мира. Например, ученые из Китая, Америки, Японии, Турции, Саудовской Аравии, Египта, Франции, Германии, Чехии и Венгрии.

Изучение осцилляционных свойств дифференциальных и разностных уравнений в Казахстане началось с работ М. Отелбаева и продолжено Р.Ойнаровым, Л.К. Кусаиновой, Б. Кошкаровой. На эту тему защищены диссертации К.Мырзатаевой, М. Алдай, С. Алимагамбетовой, С. Кудабаевой, Х.Рамазановой.

Цель диссертационного исследования. Найти необходимые и достаточные условия выполнения разностного неравенства по уравнению, используя вариационный метод для полулинейного разностного уравнения второго порядка, в общем случае коэффициентов уравнения. На основании из этого, необходимо дать достаточные и необходимые условия сопряженности и безсопряженности, осцилляторности и неосцилляторности уравнения в заданном интервале в терминах коэффициентов уравнения.

Объект исследования. Двухчленные полулинейные разностные уравнения второго порядка и разностные неравенства.

Метод исследования. На основе вариационного метода исследование осцилляционных свойств полулинейного уравнения второго порядка с использованием условий выполнения весовых разностных неравенств.

Научная новизна исследования. Необходимые и достаточные условия выполнения двухвесовых и трехвесовых разностных неравенств в множестве финитных последовательностей. Двусторонние оценки наименьших констант этих неравенств. Получены достаточные, необходимые условия осцилляционных свойств на основе принципа расширенной вариации в двухчленных полулинейных и линейных разностных уравнениях второго

порядка в случаях, когда второй коэффициент рядом с неизвестным неотрицателен и имеет разные знаки.

Основные результаты, полученные для полулинейных и линейных разностных уравнений второго порядка.

В случае, когда второй коэффициент уравнения является любая неотрицательная последовательность

- Расширенный вариационный принцип;
- Необходимые и достаточные условия в терминах весовых последовательностей для выполнения двухвесового неравенства в множестве финитных последовательностей и двусторонняя оценка минимальной константы неравенства;
- Необходимые и достаточные условия сопряженности и несопряженности уравнений на заданном интервале в терминах коэффициентов;
- Необходимые и достаточные условия осцилляторности и неосцилляторности уравнений в терминах коэффициентов;
- Необходимые и достаточные условия в терминах коэффициентов сильной осцилляторности и сильной неосцилляторности уравнений.

В случае, когда второй коэффициент уравнения является любая знака меняющаяся последовательность

- Расширенный вариационный принцип;
- Необходимые и достаточные условия в терминах весовых последовательностей для выполнения трёх весового неравенства в множестве финитных последовательностей и двусторонняя оценка минимальной константы неравенства;
- Необходимые и достаточные условия сопряженности, несопряженности и осцилляторности, неосцилляторности уравнений на заданном интервале в терминах коэффициентов.

Теоретическая и практическая ценность полученных результатов.

Исследование носит теоретический характер. Результаты, полученные по весовым разностным неравенствам, могут быть использованы в теории дискретных неравенств и теории дискретных операторов, в гармоническом анализе. Результаты по осцилляционным свойствам двухчленных полулинейных уравнений в частных производных второго порядка являются вкладом в качественную теорию разностных уравнений и могут быть использованы в спектральной теории дискретных операторов и при численном решении дифференциальных уравнений.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты и научные выводы диссертационных исследований обсуждались на научных семинарах «Функциональный анализ и его приложения», организованных кафедрой фундаментальной математики ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, а также выступили с докладами на традиционной апрельской международной математической конференции в честь Дня работников науки Республики Казахстан и семинаре «Problems of modelling process in electrical contacts»,

Алматы, 3-5 апреля 2019г.; международная научная конференция «Теоретические и прикладные вопросы математики, механики и информатики», Караганда, 12-13 июня 2019 г.; международная конференция «Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры» (EMJ-2019), Нур-Султан, 16-19 октября 2019 г.; международная узбекско-российская научная конференция «Неклассические уравнения математической физики и их приложения», Ташкент, 24-26 октября 2019 г. Кроме того, во время научной стажировки с 24 сентября по 27 декабря 2018 года, профессор кафедры математики и статистики, доктор физико-математических наук, заслуженный деятель науки РФ в области науки, были заслушаны доклады в семинаре «Спектральная теория дифференциальных операторов» под руководством лауреата Государственной премии РФ Султанаева Яудата Талгатовича (Российская Федерация, Республика Башкортостан, г. Уфа, Башкортостанский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, физико-математический факультет).

Публикации. Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 11 работах, в том числе 3 статьи в изданиях, рекомендованных Комитетом по контролю в сфере образования и науки Министерства образования и науки Республики Казахстан, 2 статьи в журнале из базы Scopus с процентилем по CiteScore не меньшим, чем 25 и 6 тезисов в материалах международных научных конференций, в том числе 1 работа в сборнике тезисов статей зарубежных конференций.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка использованной литературы. Каждый раздел разделен на подразделы.